

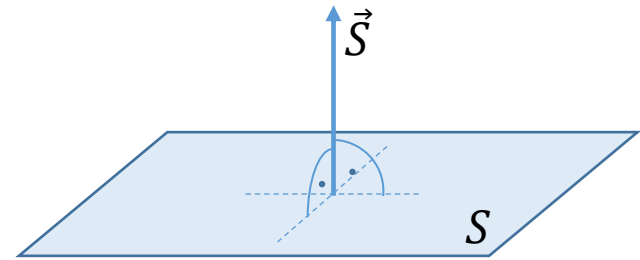
Prawo Gaussa

Dr hab. inż. Jarosław Kanak
Instytut Elektroniki, paw. C-1, pok.321
kanak@agh.edu.pl
<http://layer.uci.agh.edu.pl/~kanak>



Powierzchnia i wektor powierzchni

Powierzchnia S i wektor powierzchni \vec{S}

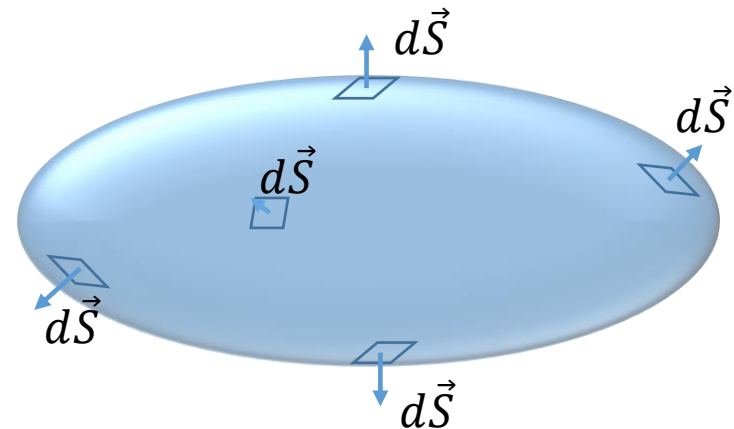


Wektor powierzchni \vec{S} dla płaskiej powierzchni S ma następujące własności - długość i kierunek:

- długość wektora jest równa liczbowo powierzchni S
- kierunek wektora jest prostopadły (normalny) do powierzchni

Dla zamkniętej powierzchni wektor normalny w każdym punkcie powierzchni jest skierowany od jej wnętrza na zewnątrz.

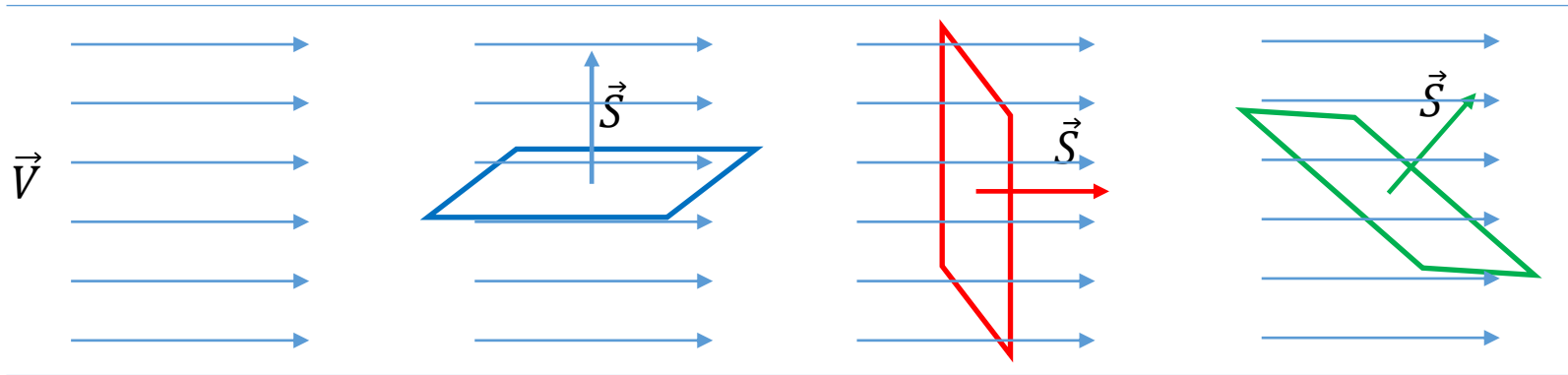
Powierzchnię trzeba podzielić na małe kawałki dS aby móc zdefiniować wektor $d\vec{S}$ prostopadły do powierzchni.



Strumień przez powierzchnię



Założmy, że mamy strumień przepływającej z jednorodną prędkością wody \vec{V} .



Do strumienia wkładamy ramkę o powierzchni S :

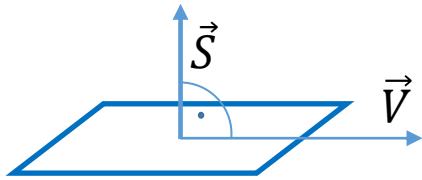
- równoległe do kierunku przepływu wody – przez ramkę nie przepływa woda: wektor powierzchni \vec{S} prostopadły do wektora \vec{V}
- prostopadle do kierunku przepływu wody – przez ramkę przepływa maksymalna ilość wody: wektor powierzchni \vec{S} równoległy do wektora \vec{V}
- pochyloną do kierunku przepływu wody – przez ramkę przepływa mniejsza ilość wody

Strumień przez powierzchnię

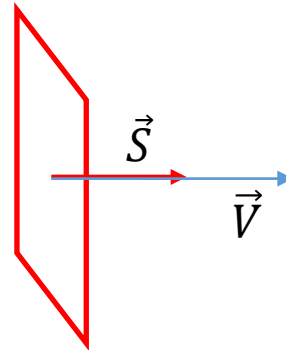


Strumień wody przepływający przez powierzchnię S rozpostartą na ramce opisuje wzór:

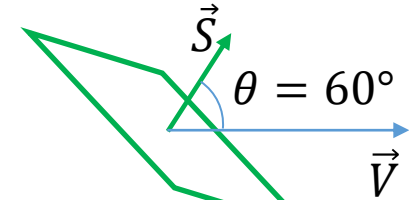
$$\Phi = \vec{V} \circ \vec{S}$$



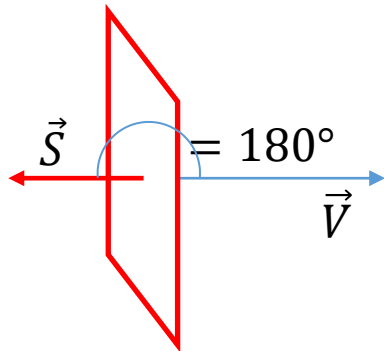
$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 90^\circ = 0$$



$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 0^\circ = V \cdot S$$



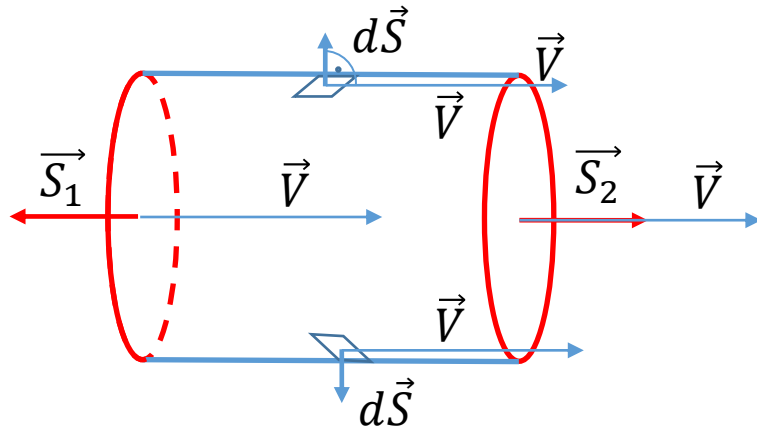
$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2} (V \cdot S)$$



$$\Phi = V \cdot S \cdot \cos 180^\circ = -(V \cdot S)$$

Gdy zwroty wektora prędkości \vec{V} i wektora powierzchni \vec{S} są przeciwne strumień jest ujemny!

Strumień przez powierzchnię zamkniętą



Przykład: rura z podstawami – wektor powierzchni prostopadły w każdym miejscu do powierzchni.

Powierzchnia złożona:

$$\Phi_{całk} = \sum \Phi_i$$

$$\Phi_{całk} = \oint \vec{V} \circ d\vec{S}$$

Dla podstaw:

$$\Phi_1 = V \cdot S_1 \cdot \cos 180^\circ = -(V \cdot S)$$

$$\Phi_2 = V \cdot S_2 \cdot \cos 0^\circ = (V \cdot S)$$

Dla powierzchni bocznej:

$$\Phi_B = V \cdot dS \cdot \cos 90^\circ = 0$$

Całkowity strumień:

$$\begin{aligned} \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_B = \\ &= -(V \cdot S) + (V \cdot S) + 0 = 0 \end{aligned}$$



Prawo Gaussa - grawitacja

➤ Dla pola grawitacyjnego:

Całkowity strumień pola grawitacyjnego przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą (tzw. powierzchnię Gaussa), jest proporcjonalny do masy będącej źródłem tego pola – masy, która jest zamknięta wewnątrz powierzchni Gaussa.

$$\Phi_g = -4\pi GM \quad \text{ale już wiemy: } \Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s} \quad \text{więc: } \boxed{\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = -4\pi GM}$$

➤ Właściwości powierzchni Gaussa:

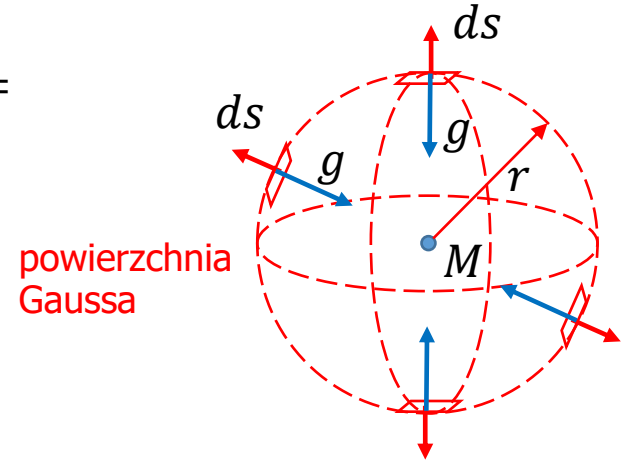
- Powierzchnia Gaussa jest tworem hipotetycznym, matematyczną konstrukcją myślową,
- Jest dowolną powierzchnią zamkniętą, lecz w praktyce powinna mieć kształt związany w symetrią pola,
- Powierzchnię Gaussa należy tak poprowadzić aby punkt, w którym obliczamy natężenie pola grawitacyjnego leżał na tej powierzchni.

Prawo Gaussa – masa punktowa



$$\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s} = \oint g \cdot ds \cdot \cos(180^\circ) = - \oint g ds =$$

$$\Phi_g = -g \oint ds = -g4\pi r^2$$



Z prawa Gaussa wiemy, że całkowity strumień pola grawitacyjnego jest równy:

$$\Phi_g = -4\pi GM$$

$$-g4\pi r^2 = -4\pi GM \quad \longrightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

Prawo Gaussa – sferyczny rozkład masy



Gęstość powierzchniowa:

$$\sigma = \frac{M}{S} = \frac{M}{4\pi R^2}$$

Obszar na zewnątrz sferycznej masy:

$$r > R$$

Z prawa Gaussa:

$$\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s}$$

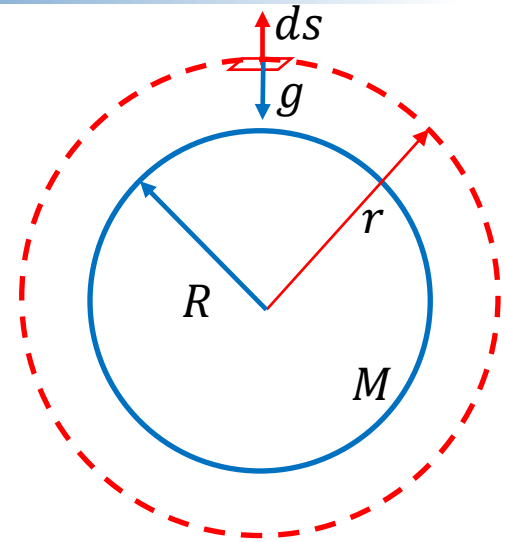
$$\Phi_g = -4\pi GM$$

gdzie M jest masą powłoki
wewnątrz powierzchni Gaussa

$$\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = -4\pi GM \quad \longrightarrow \quad -g4\pi r^2 = -4\pi GM \quad \longrightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

$$\text{Jeżeli znamy gęstość powierzchniową} \quad M = \sigma 4\pi R^2 \quad \longrightarrow \quad g = \frac{G\sigma 4\pi R^2}{r^2}$$

powierzchnia
Gaussa

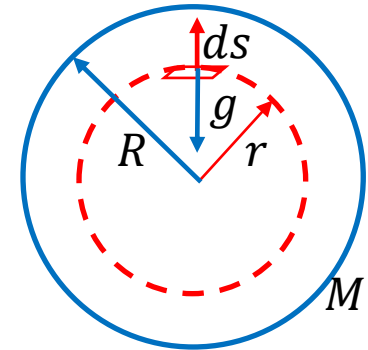


Prawo Gaussa – sferyczny rozkład masy



Obszar wewnątrz sferycznej masy:

$$r < R$$



Z prawa Gaussa:

$$\Phi_g = \oint \vec{g} \circ d\vec{s} \quad \Phi_g = -4\pi GM$$

gdzie \underline{M} jest masą zawartą wewnątrz powierzchni Gaussa

$$\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = 0 \quad \longrightarrow \quad g = 0$$

wewnątrz wybranej powierzchni Gaussa nie ma żadnej masy! $\underline{M = 0}$

Prawo Gaussa – objętościowy rozkład masy



Kula o promieniu R i masie M

➤ $r > R$

– promień powierzchni Gaussa większy niż promień kuli – cała masa zawarta wewnątrz powierzchni Gaussa

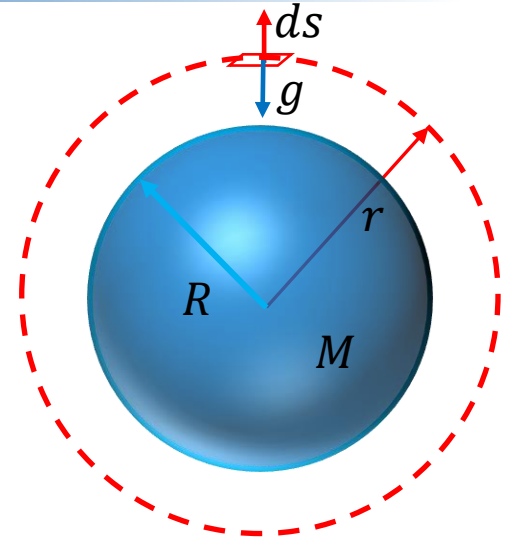
Z prawa Gaussa:

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = -4\pi GM$$

$$-g4\pi r^2 = -4\pi GM \quad \longrightarrow \quad g = \frac{GM}{r^2}$$

gdzie M jest całą masą kuli wewnątrz powierzchni Gaussa

gdy $r > R$ cała masa kuli jest wewnątrz powierzchni Gaussa

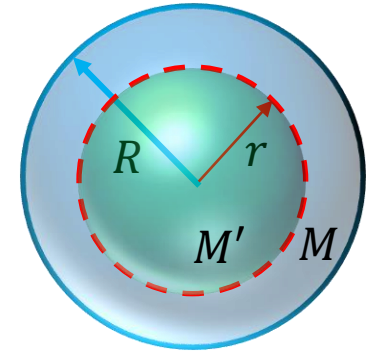


Prawo Gaussa – objętościowy rozkład masy



➤ $r < R$

– promień powierzchni Gaussa mniejszy niż promień kuli – tylko część masy zawarta wewnątrz powierzchni Gaussa



Objętościowy rozkład masy:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{M'}{V'} = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3} \quad M' = M \frac{V'}{V} \quad M' = M \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M \frac{r^3}{R^3}$$

$$\oint \vec{g} \circ d\vec{s} = -4\pi GM'$$

gdzie M' jest masą kuli wewnątrz powierzchni Gaussa

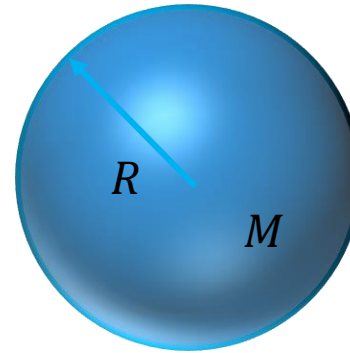
$$-g4\pi r^2 = -4\pi GM' \quad \longrightarrow \quad g = \frac{GM'}{r^2} = \frac{G}{r^2} M \frac{r^3}{R^3} = \frac{GMr}{R^3}$$

➤ Gdy $r = R$ $g = \frac{GM}{R^2}$

Prawo Gaussa – objętościowy rozkład masy



Kula o promieniu R i masie M



➤ $r < R$

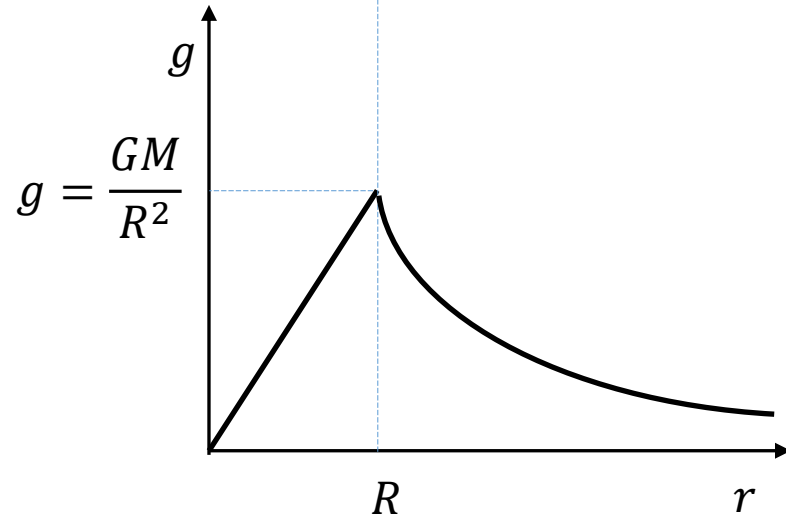
$$g = \frac{GMr}{R^3} = \frac{GM}{R^3} r$$

➤ $r > R$

$$g = \frac{GM}{r^2} = GM \frac{1}{r^2}$$

➤ $r = R$

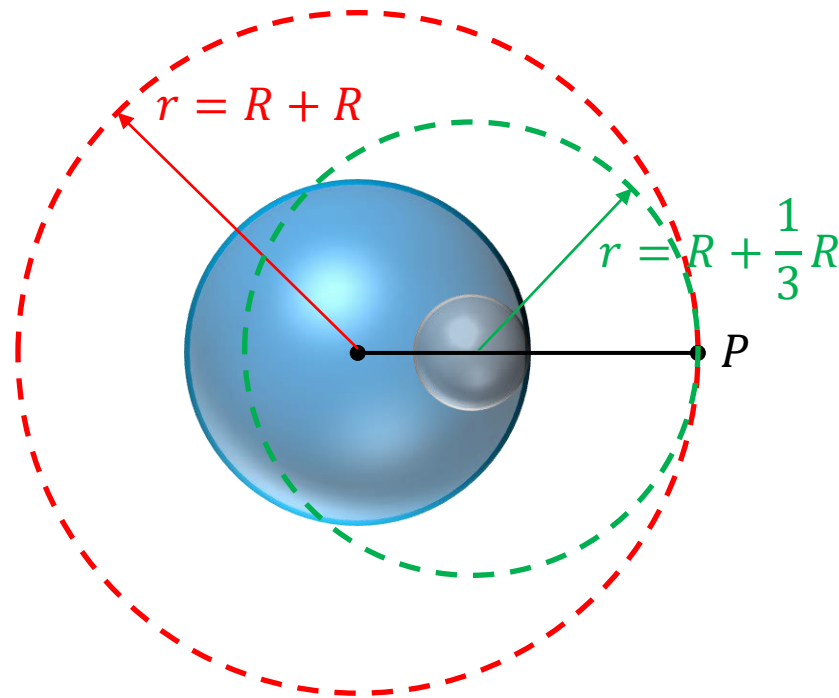
$$g = \frac{GM}{R^2}$$





Prawo Gaussa – Przykład

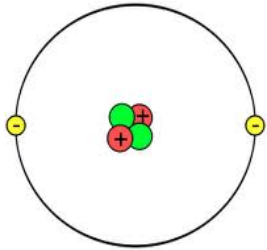
W jednorodnej kuli o promieniu R , wykonanej z materiału o gęstości ρ_1 , wykonano kuliste wydrążenie o promieniu $r = \frac{1}{3}R$ przylegające do powierzchni kuli. Wydrążenie wypełniono materiałem o gęstości $\rho_2 = \frac{1}{2}\rho_1$. Korzystając z prawa Gaussa oblicz natężenie pola grawitacyjnego w punkcie P , w odległości R od powierzchni kuli. Zrób rysunek z zaznaczeniem wybranych powierzchni Gaussa.



$$g = \frac{23}{72} \pi G R \rho_1$$



Prawo Gaussa - elektrostatyka



elektron ładunek ujemny = $-e$

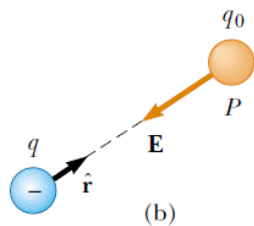
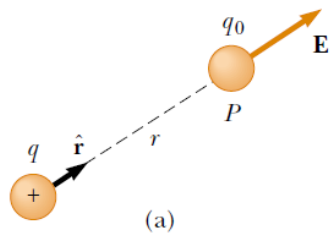
proton ładunek dodatni = $+e$

Każdy inny ładunek jest wielokrotnością ładunku elementarnego
 $|Q| = Ne$

Ładunek elementarny

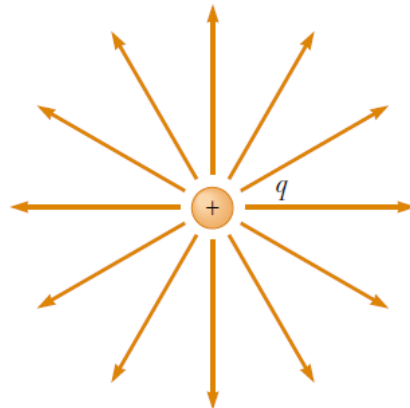
$$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Natężenie pola elektrostatycznego:

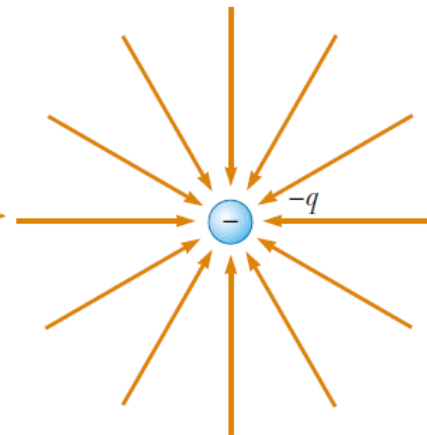


Pole ładunku punktowego:

dodatniego:

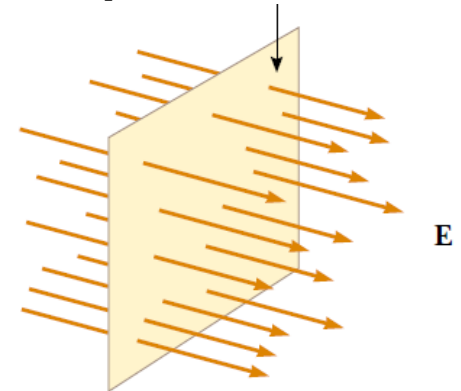


ujemnego:



Strumień pola elektrostatycznego :

powierzchnia S



$$\Phi_E = \vec{E} \circ \vec{S}$$



Prawo Gaussa - elektrostatyka

➤ Dla pola elektrostatycznego:

Całkowity strumień pola elektrycznego przechodzący przez dowolną powierzchnię zamkniętą jest równy całkowitemu ładunkowi zawartemu wewnątrz tej powierzchni podzielonemu przez ϵ_0 .

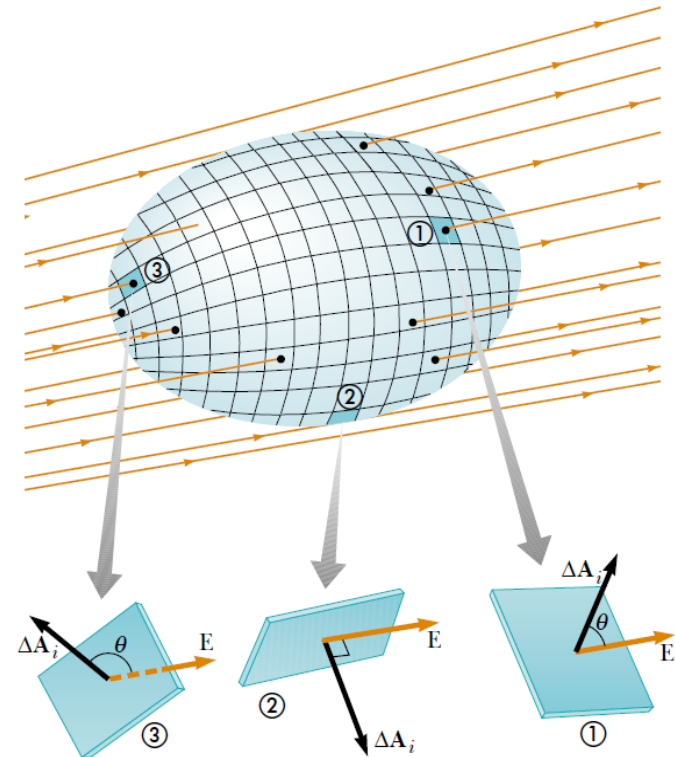
$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

strumień dla pola \vec{E} :

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \circ d\vec{s}$$

więc:

$$\oint \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

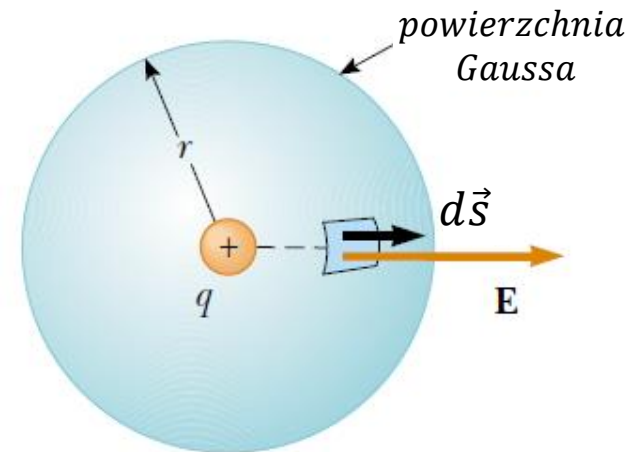




Prawo Gaussa – ładunek punktowy

Powierzchnia Gaussa – sfera o promieniu r

- ✓ Wektor \mathbf{E} równoległy do wektora $d\mathbf{s}$ w każdym miejscu na sferze
- ✓ $E = \text{const}$ na powierzchni



$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \oint E \cdot ds \cdot \cos 0^\circ = E \oint ds = E4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \text{więc:} \quad E4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \longrightarrow \quad E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

$$\text{skoro:} \quad E = \frac{F}{q_0} \quad \longrightarrow \quad F(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_0}{r^2}$$

Prawo Coulomba

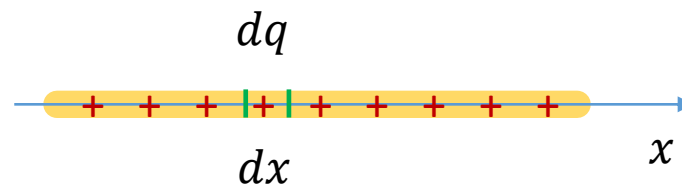
Prawo Coulomba
wynika z prawa Gaussa



Ciągły rozkładu ładunku

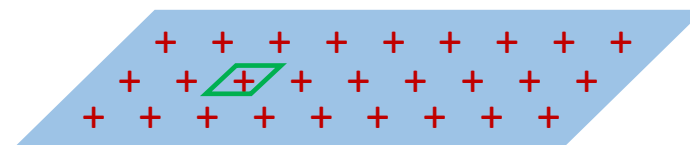
- gęstość liniowa ładunku: λ

$$\lambda = \frac{dq}{dx}$$



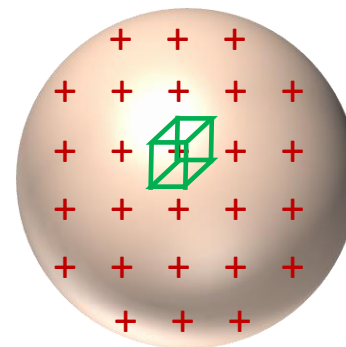
- gęstość powierzchniowa ładunku: σ

$$\sigma = \frac{dq}{ds}$$



- gęstość objętościowa ładunku: ρ

$$\rho = \frac{dq}{dV}$$



W zależności od rodzaju gęstości ładunku, pole wypadkowe może być całką liniową, powierzchniową lub objętościową:

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \int_V k \frac{\rho dV}{r^2} \hat{r}$$



Prawo Gaussa – liniowy rozkład ładunku

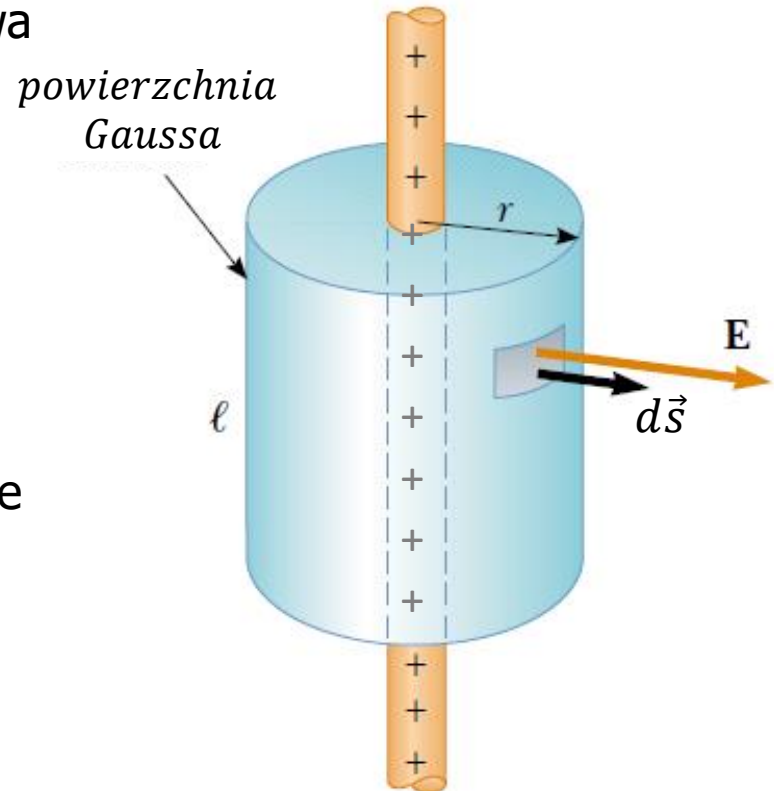
Powierzchnia Gaussa – powierzchnia walcowa o promieniu r

- ✓ Wektor \mathbf{E} równoległy do wektora $d\mathbf{s}$ w każdym miejscu na powierzchni bocznej
- ✓ $E = \text{const}$ na powierzchni bocznej
- ✓ Wektor \mathbf{E} prostopadły do wektora $d\mathbf{s}$ w każdym miejscu na powierzchni podstaw, $\cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \Phi_E = 0$ przez powierzchnie podstaw

$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \oint ds = E2\pi r l$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda l}{\epsilon_0} \quad E2\pi r l = \frac{\lambda l}{\epsilon_0}$$

$$\lambda = \frac{Q}{l} \quad \text{liniowa gęstość ładunku}$$



$$E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$



Powierzchniowy rozkład ładunku

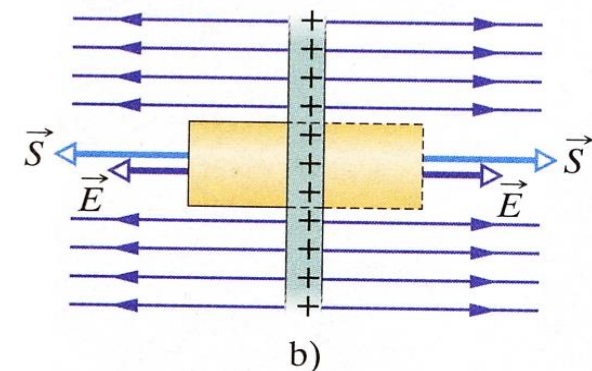
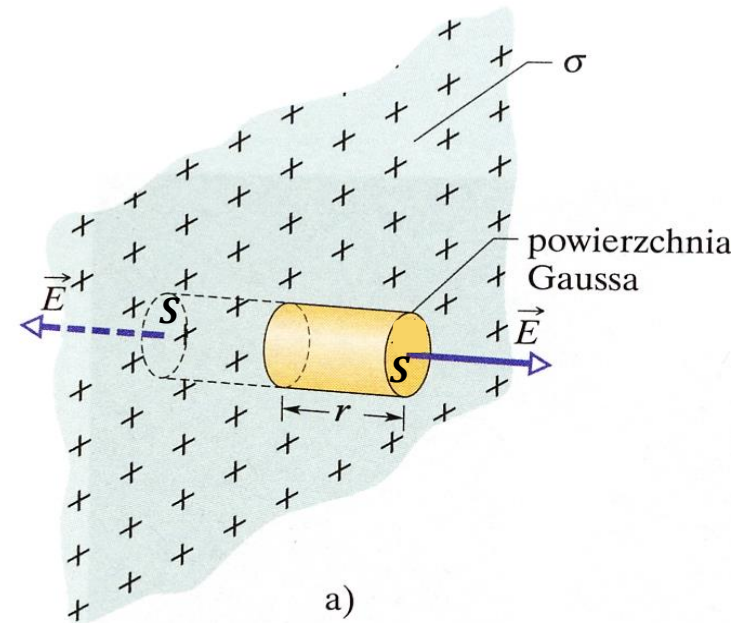
- ✓ $\mathbf{E} \perp \mathbf{ds}$ w każdym miejscu na powierzchni bocznej $\Rightarrow \Phi_E = 0$
- ✓ $\mathbf{E} \parallel \mathbf{S}$ w każdym miejscu na powierzchni podstaw
- ✓ $E = \text{const}$ na podstawach

$$\Phi_E = E2S$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad E2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$\sigma = \frac{Q}{S} \text{ powierzchniowa gęstość ładunku}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$





Sferyczny rozkład ładunku

✓ **E** || **ds** w każdym miejscu na powierzchni Gaussa

➤ $r > R$

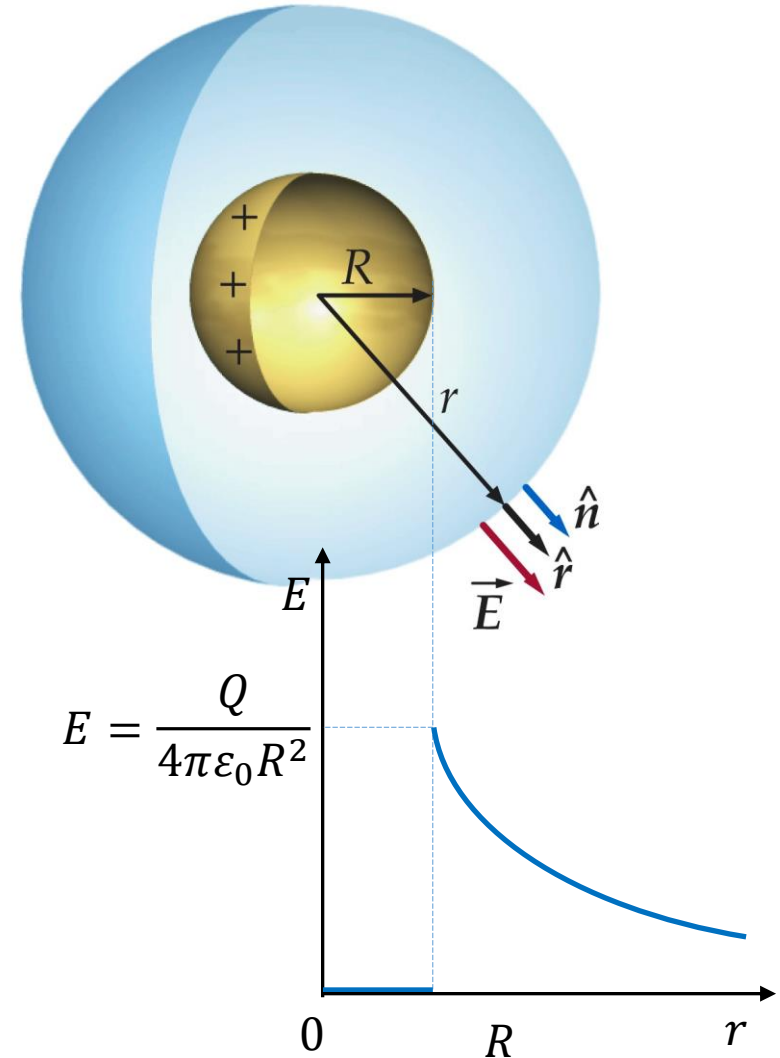
$$\Phi_E = \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \oint ds = E4\pi r^2$$

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \text{pole na zewnątrz jak od ładunku punktowego}$$

➤ $r < R$

dla metalowej kuli
ładunek całkowity Q jest
rozłożony tylko na
powierzchni sfery o
promieniu R więc $E = 0$





Dywergencja pola wektorowego

Dywergencja jest miarą źródłowości pola (oznacza intensywność źródła), wskazuje na lokalne źródła pola wektorowego.

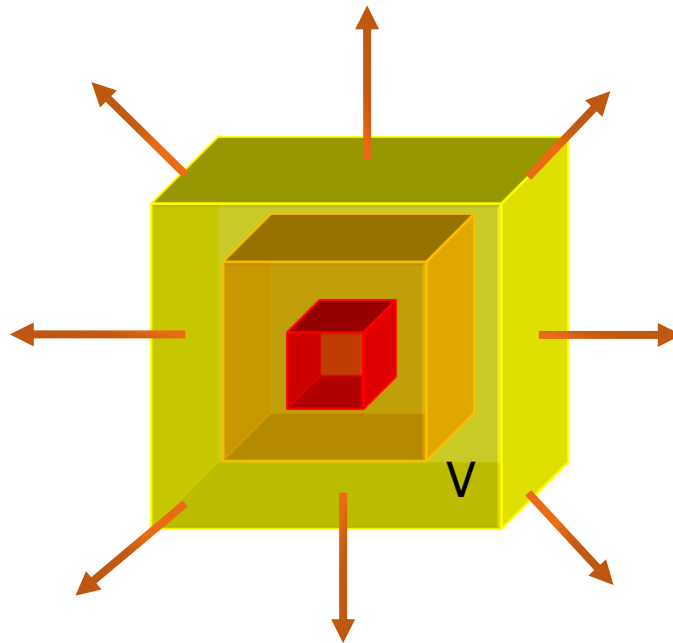
$\text{div} \vec{E} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{\oint \vec{E} \circ d\vec{s}}{V}$ jest w granicy nieskończenie małej objętości V , strumieniem wychodzącym ze źródła i określa jego wydajność

$$\text{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \circ \vec{E}$$

Operator nabla:

$$\vec{\nabla} = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

Operator dywergencji to wynik iloczynu skalarnego operatora nabla i wektora pola



$$\begin{aligned} \text{div} \vec{E} &= \vec{\nabla} \circ \vec{E} = \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \end{aligned}$$



Różniczkowa postać prawa Gaussa

zamiana całki powierzchniowej
na objętościową - Twierdzenie
Gaussa-Ostrogradskiego

$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{s} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV$$

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Prawo Gaussa w postaci całkowej:

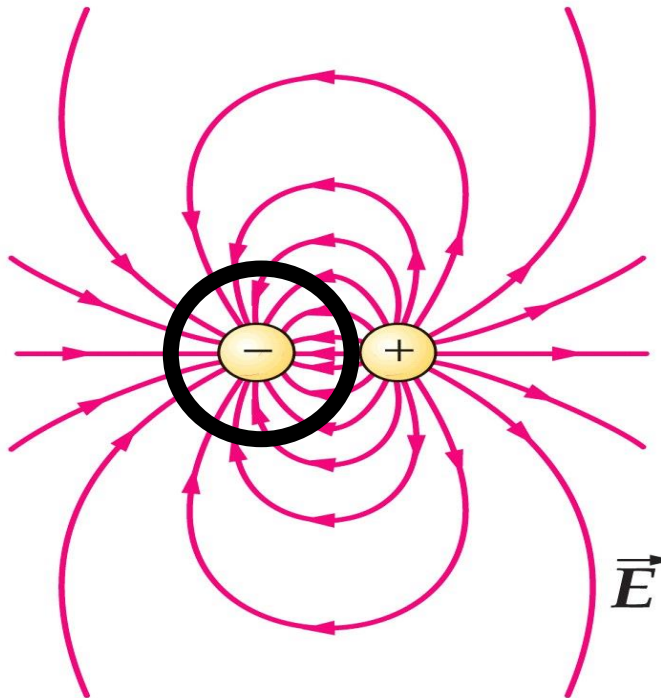
$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{Q_{wew}}{\epsilon_0}$$

$$Q_{wew} = \iiint_V \rho dV$$

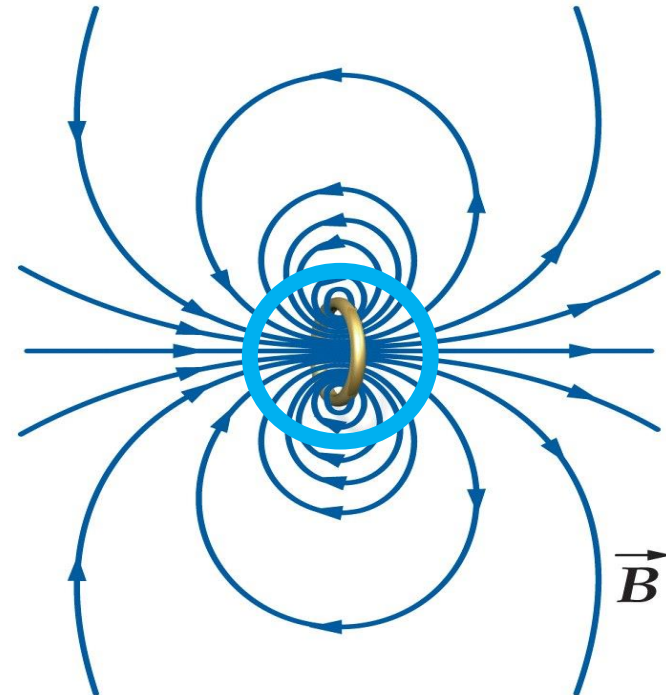
$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho dV$$

różniczkowa postać prawa Gaussa

Prawo Gaussa dla magnetyzmu

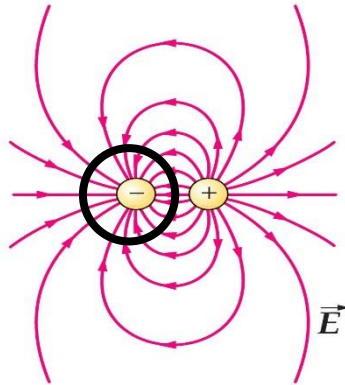


Istnieje pojedynczy ładunek punktowy – monopol elektryczny



Brak monopoli magnetycznych. Magnes czy pętla z prądem stanowią dipol magnetyczny

Prawo Gaussa dla magnetyzmu

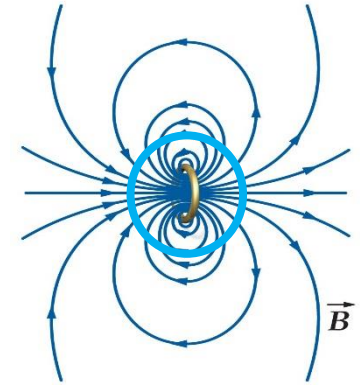


$$\oint_S \vec{E} \circ d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\oint_S \vec{B} \circ d\vec{s} = 0$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$



Treścią prawa Gaussa dla magnetyzmu jest to, że pole magnetyczne jest beźródłowe. Strumień pola magnetycznego przez powierzchnię zamkniętą jest zawsze równy zero. Nie można wyodrębnić pojedynczego bieguna magnetycznego – nie istnieją monopole magnetyczne.

$$\Phi_B = \oint_S \vec{B} \circ d\vec{s} = 0$$

Prawo Gaussa - podsumowanie



W praktyce zastosowanie prawa Gaussa jest ograniczone do konkretnych przypadków - symetrii:

- pole (jednorodne) od naładowanej nieskończonej płaszczyzny (powierzchniowy rozkład ładunku)
- pole (o symetrii cylindrycznej) od nieskończenie długiego pręta (liniowy rozkład ładunku) lub walca (powierzchniowy rozkład ładunku – walec przewodzący, objętościowy rozkład ładunku - walec nie przewodzący)
- pole (o symetrii sferycznej) od naładowanej kuli lub powierzchni sferycznej

Obliczenia - postępowanie:

- Wybrać właściwą powierzchnię Gaussa – dopasowaną do symetrii rozkładu ładunku. Uzasadnić ten wybór. Wykonać odpowiedni rysunek
- Obliczyć strumień pola elektrycznego przez powierzchnię Gaussa (lewa strona prawa Gaussa).
- Znaleźć ładunek zawarty wewnątrz powierzchni Gaussa (prawa strona prawa Gaussa).
- Porównać obie strony prawa Gaussa wyznaczając wartość wektora natężenia pola elektrycznego E .